Matematika 1 (2011/2012)

MATRICE

Matrica je svaka pravokutna tablica realnih ili kompleksnih brojeva. Ako ona ima m redaka i n stupaca, tada kažemo da je **tipa** $m \times n$ i zapisujemo je u obliku

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots a_{mn} \end{bmatrix}$$

ili kraće $A = (a_{ij})$. Element a_{ij} naziva se **opći element** matrice A. To je realan ili kompleksan broj.

Ako je $m = n$ kažemo da je A **kvadratna matrica** reda n. Elementi $a_{11}, a_{22}, \ldots a_{nn}$ čine **dijagonalu** kvadratne matrice.
Ako je $m = 1$ kažemo da je A **retčana matrica**, a ako je $n = 1$ kažemo da je A **stupčana matrica**. Retčane i stupčane matrice nazivamo vektorima.

Skup svih matrica tipa $m \times n$ označujemo s $\mathcal{M}_{mn}$. Skup svih kvadratnih matrica tipa $n \times n$ označujemo s $\mathcal{M}_n$.

Kvadratna matrica je **gornja trokutasta** ako je $a_{ij} = 0$ za $i > j$ (svi elementi ispod dijagonale jednaki su nuli), **donja trokutasta** ako je $a_{ij} = 0$ za $i < j$ (svi elementi iznad dijagonale jednaki su nuli), **dijagonalna** ako je $a_{ij} = 0$ za $i \neq j$ (svi elementi koji nisu na dijagonali jednaki su nuli).

Jedinična matrica je kvadratna dijagonalna matrica s jedinicama na dijagonali. Označavomo ju s I_n, gdje je n red te matrice. **Nul matrica** je matrica čiji su svi elementi jednaki nuli.

Transponirana matrica A^T matrice A ima elemente $(A^T)_{ij} = a_{ji}$. Ona se dobiva iz matrice A zamjenom redaka i stupaca.
Dakle, ako je matrica A tipa $m \times n$, tada je A^T tipa $n \times m$.
Očito je $(A^T)^T = A$. Transponiranje se lijepo uklapa u ostale operacije s matricama:

$$
\begin{aligned}
(A+B)^T &= A^T + B^T, \\
(\nu A)^T &= \nu A^T, \\
(AB)^T &= B^T A^T.
\end{aligned}
$$

Simetrična matrica je kvadratna matrica za koju vrijedi $A = A^T$.
Antisimetrična matrica je kvadratna matrica za koju vrijedi $A = -A^T$.

Zbrajanje matrica

Mogu se zbrajati samo matrice istog tipa. Ako su matrice A i B istog tipa, tada je matrica

$$C = A + B$$

istog tipa kao i matrice A i B i vrijedi:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Dakle matrice se zbrajaju član po član. Svojstva zbrajanja su:

- $A + B = B + A$ (komutativnost)
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ (asocijativnost)

Množenje matrice skalarom

Matrica se množi s nekim skalarom (brojem) tako da se svaki element matrice pomnoži s tim brojem. Drugim riječima, elementi matrice $B = \lambda A$ su:

$$b_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Množenje matrica

Matrice A i B možemo pomnožiti samo ako su **ulančane**, odnosno ako matrica A ima onoliko stupaca koliko matrica B ima redaka.
Matrica $C = A \cdot B$ ima redaka koliko A i stupaca koliko B. Dakle, ako je matrica A tipa $m \times k$ i B tipa $k \times n$, tada je matrica C tipa $m \times n$.

U sljedećem primjeru su oba množenja definirana, ali umnošci nisu istog tipa:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}.$$

Za svaku matricu tipa $m \times n$ vrijedi

$$I_m A = A I_n = A.$$

Teorem (svojstva množenja matrica): Za proizvoljne matrice A, B i C i broj λ, ukoliko su svi umnošci definirani vrijedi:

- $(AB)C = A(BC)$ (asocijativnost)
- $A(B + C) = AB + BC$ (distributivnost)
- $(A + B)C = AC + BC$ (distributivnost)
- $\lambda(AB) = A(\lambda B)$